

FIBRE OPTICE

Capitolul 1

CRONOLOGIE

- 1854
- 1920
- 1950
- 1970
- 1979

1854 – Fenomenul de reflexie totala, responsabil de functionarea fibrei optice, este cunoscut din 1854.

1920 – Primele fibre optice

1950 – Utilizarea fibrelor optice devine practica datorita introducerii stratului teaca (cladde) . Se utilizeaza in imagistica medicala pe distante mici. Utilizarea in comunicatii a fost considerate nepractica datorita atenuarii foarte mari (~ 1000 dB/km).

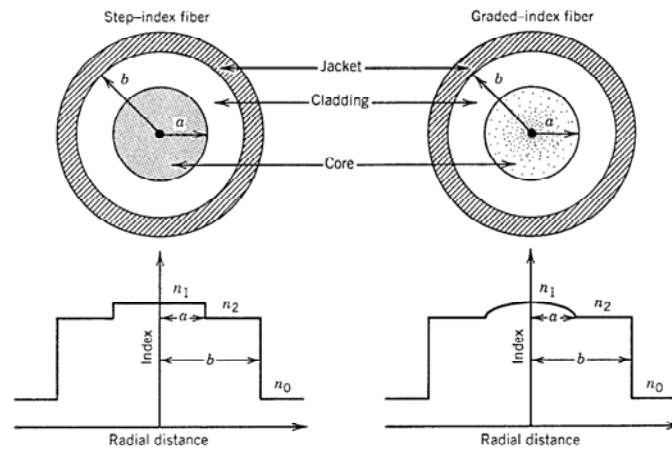
1970 – Situatia se schimba drastic [K. C. Kao and G. A. Hockham, *Proc. IEE* **113**, 1151 (1966)]. Pierderile in fibra sunt reduse la mai putin de 20 dB/km.

1979 – Pierderile sunt reduse la 0.2 dB.km la lungimi de unda linge 1.55 micro-m. Incepe revolutia fibrelor optice in comunicatii .

PROBLEMATICA ABORDATA

- Descrierea opto-geometrica a mecanismului de ghidare a luminii in FO
- Descrierea propagarii undelor luminoase folosind ecuatiile lui Maxwell
- Dispersia in fibra optica
- Limitarea vitezei de transmisie datorita dispersiei
- Pierderile in FO
- Efecte neliniare in fibra optica

Modelul opto-geometric al fibrei optice

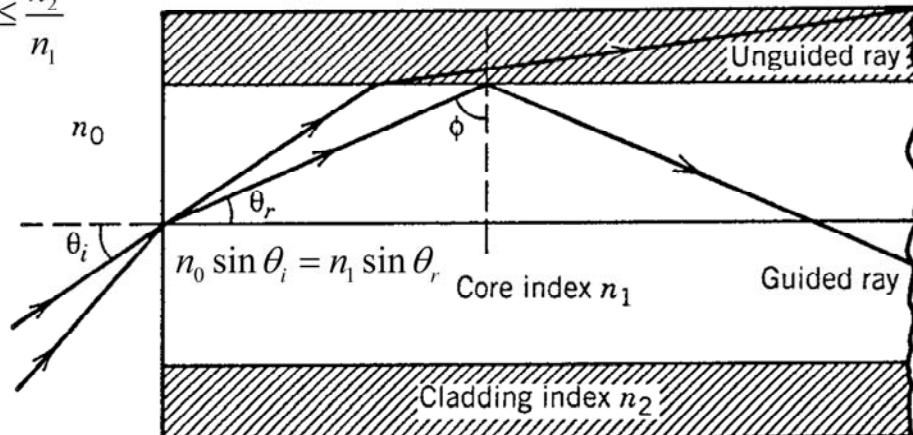


O fibra optica consta dintr-un miez cilindric de silica inconjurat de o teaca (clad) a carei indice de refractie este mai mic decit al miezului.

O explicatie a proprietatilor fibrei optice se poate obtine utilizind optica geometrica. Aceasta descriere, desi aproximativa, este valabila atunci cind raza miezului, a , este mult mai mare decit lungimea de unda, λ . Atunci cind cele doua sunt comparabile, este nevoie sa folosim teoria propagarii undelor electromagnetice.

Fibre cu salt de indice

$$\sin \phi \leq \frac{n_2}{n_1}$$



$$\theta_i$$

Fibre cu salt de indice

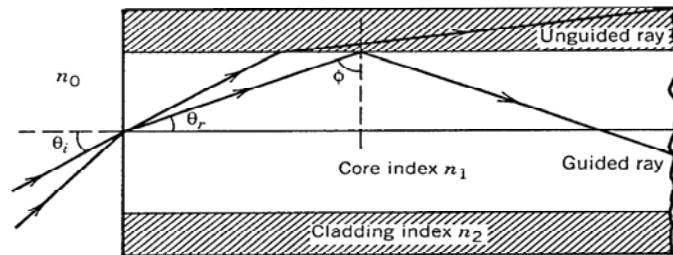
$$n_0 \sin \theta_i = n_1 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \phi_c \right) = n_1 \cos \phi_c = \left(n_1^2 - n_2^2 \right)^{1/2} = NA$$

$$n_1 = n_2$$

$$NA = n_1 (2\Delta)^{1/2} \quad \Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1}$$

$$\theta_i$$

Dispersia intermodala a fibrei cu salt de indice



$$\Delta T = \frac{n_1}{c} \left(\frac{L}{\sin \phi_c} - L \right) = \frac{L}{c} \frac{n_1^2}{n_2} \Delta \quad \Delta T < T_B = \frac{1}{B} \quad \frac{L}{c} \frac{n_1^2}{n_2} \Delta < \frac{1}{B}$$

$$BL < \frac{n_2}{n_1^2} \frac{c}{\Delta}$$

θ_i

EXEMPLU

Fibra fara teaca: $n_1=1.5$ si $n_2=1$.

$BL < 0.4 \text{ (Mb/s)-km}$.

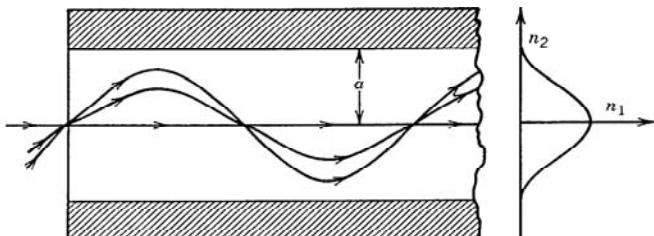
Fibre cu teaca are $\Delta < 0.01$

Pentru $\Delta = 2 \cdot 10^{-3}$ avem $BL < 100 \text{ (Mb / s) km}$

$$BL < \frac{n_2}{n_1^2} \frac{c}{\Delta}$$

Aceasta fibra poate comunica cu 10 Mb/s pe o distanta de 10 km.

Fibre cu indice gradat



$$n(\rho) = \begin{cases} n_1 [1 - \Delta (\rho/a)^\alpha]; & \rho < a \\ n_1 (1 - \Delta) = n_2; & \rho \geq a \end{cases}$$

$$\frac{d^2\rho}{dz^2} = \frac{1}{n} \frac{dn}{d\rho}$$

$$\begin{aligned} \rho(z) &= \rho_0 \cos(pz) + (\rho'_0/p) \sin(pz) \\ p &= (2\Delta/a^2)^{1/2} \end{aligned}$$

Parametrul alfa determina profilul fibrei. Profilul de fibra cu salt de indice se atinge pentru alfa foarte mare. O fibra cu profil parabolic este o fibra pentru care alfa = 2.

In acest caz, folosind optica geometrica si aproximatia paraxiala, se demonstra ca traectoria razei este data de relatia ..., unde r_0 este distanta radiala a razei de la axa fibrei. In cazul profilului parabolic, folosind relatia pentru $r_0 < a$, ecuatia traectoriei se reduce la ecuatia oscilatorului armonic, a carei solutie generala este...., iar r_0 si r_0 -prim sunt pozitia si directia razei la intrare. Relatia arata ca toate razele recuperaza pozitia si directia initiala la distanta $z=2m(\pi)/p$, unde m este un intreg. Deci fibrele cu indice gradat nu au , ideal, dispersie intermodala.

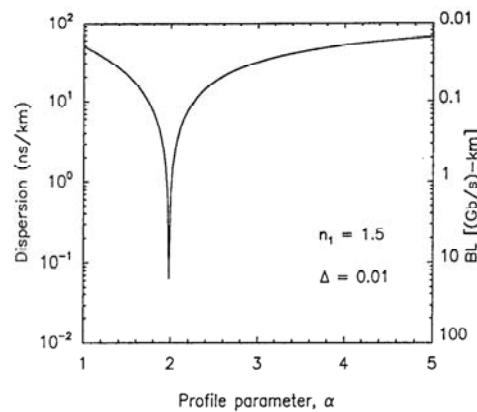
Dispersia intermodala a fibrei cu indice gradat

$$\alpha = 2(1 - \Delta)$$

$$\frac{\Delta T}{L} = \frac{n_1}{8c} \Delta^2$$

$$\Delta T < T_B = \frac{1}{B}$$

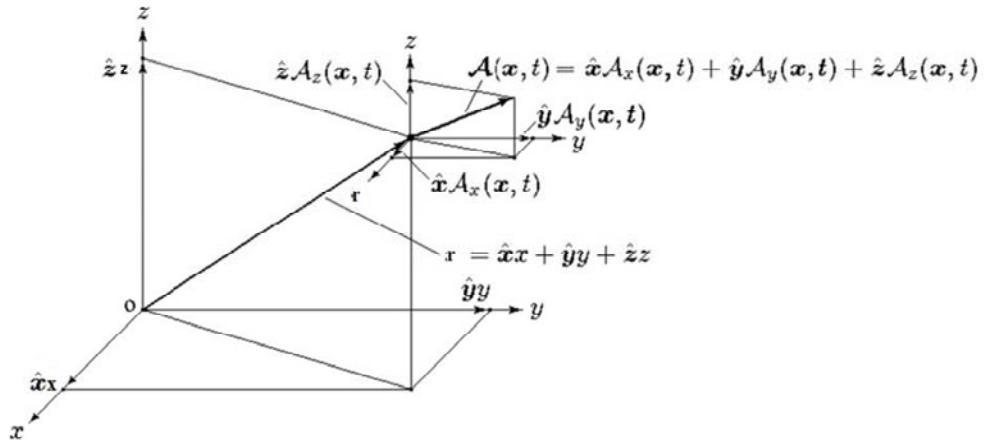
$$BL < \frac{8c}{n_1 \Delta^2}$$



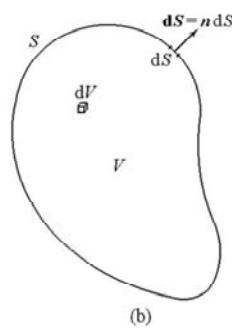
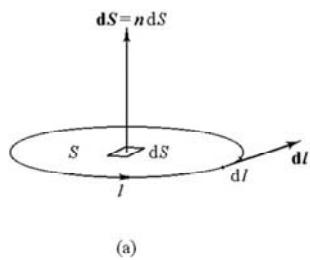
In cazul fibrelor practice, modelul opto-geometric si aproximatia paraxiala trebuie abandonate. Singura metoda valabila fiind propagarea uMinimul dispersiei se obtine pentru unde. Studiile au aratat ca in acest caz, raportul deltaR/L variaza foarte mult cu parametrul alfa (vezi figura in care m1=1.5 si delta=0.01). Minimul dispersiei se obtine pentru alfa=... si este dat de relatia deltaT/L=.....

Fibrele cu indice gradat, cu un indice al profilului optimizat, poate sustine viteze de 100 Mb/s la distante de 100 km.

Vector de pozitie si functie vectoriala



Ecuatiile lui Maxwell in vid



$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \\ \nabla \times (\mathbf{B} / \mu_0) = \partial (\epsilon_0 \mathbf{E}) / \partial t + \mathbf{J} \\ \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

$$q(t) = \iiint_V \rho(\mathbf{r}, t) dV$$

$$I(t) = \iint_S \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\partial \rho / \partial t$$

$$I(t) = -dq(t) / dt$$

Ecuatiile lui Maxwell in material

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E} = - \partial \mathbf{B} / \partial t \\ \nabla \times (\mathbf{B} / \mu_0) = \partial (\varepsilon_0 \mathbf{E}) / \partial t + \mathcal{J}_f + \mathcal{J}_P + \mathcal{J}_M \\ \nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E}) = \rho_f + \rho_P \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{P} = - \rho_P \\ \mathcal{J}_f = \sigma \mathbf{E} \\ \mathcal{J}_P = \partial \mathbf{P} / \partial t \\ \mathcal{J}_M = \nabla \times \mathbf{M} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E} = - \partial \mathbf{B} / \partial t \\ \nabla \times (\mathbf{B} / \mu_0) - \nabla \times \mathbf{M} = \partial (\varepsilon_0 \mathbf{E}) / \partial t + \mathcal{J}_f + \partial \mathbf{P} / \partial t \\ \nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E}) + \nabla \cdot \mathbf{P} = \rho_f \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \mathbf{B} / \mu_0 - \mathbf{M} = \mathbf{H} \\ \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \mathbf{D} \end{array}$$

Materiale simple: nedispersiva, liniare, izotrope

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \\ \nabla \times \mathbf{H} = \partial \mathbf{D} / \partial t + \mathcal{J}_f \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} \mathcal{P} &= \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \\ \mathcal{M} &= \chi_m \mathbf{H} \\ \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \partial \mathbf{H} / \partial t \\ \nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \partial \mathbf{E} / \partial t + \sigma \mathbf{E} + \mathcal{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \end{cases}$$

Ecuatiile lui Maxwell in domeniul frecventa-1

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{A}(\mathbf{r}) \sin(\omega t + \phi) = \Im[\mathbf{A}(\mathbf{r}) e^{j\phi} e^{j\omega t}] = \Im[\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}] \\ \mathcal{A}(\mathbf{r}, t) &= \hat{\mathbf{x}} \mathbb{A}_x(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{y}} \mathbb{A}_y(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{z}} \mathbb{A}_z(\mathbf{r}, t) = \\ &= \hat{\mathbf{x}} A_x(\mathbf{r}) \sin(\omega t + \phi_x) + \hat{\mathbf{y}} A_y(\mathbf{r}) \sin(\omega t + \phi_y) + \hat{\mathbf{z}} A_z(\mathbf{r}) \sin(\omega t + \phi_z) = \\ &= \Im[\hat{\mathbf{x}} A_x(\mathbf{r}) e^{j\phi_x} e^{j\omega t} + \hat{\mathbf{y}} A_y(\mathbf{r}) e^{j\phi_y} e^{j\omega t} + \hat{\mathbf{z}} A_z(\mathbf{r}) e^{j\phi_z} e^{j\omega t}] = \\ &= \Im\{\hat{\mathbf{x}} \underline{A}_x(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{y}} \underline{A}_y(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{z}} \underline{A}_z(\mathbf{r})\} e^{j\omega t} \\ \underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) &= \hat{\mathbf{x}} \underline{A}_x(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{y}} \underline{A}_y(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{z}} \underline{A}_z(\mathbf{r}) = \Re[\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r})] + j \Im[\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r})] \\ \mathcal{A}(\mathbf{r}, t) &= \Im[\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}] = \Re[\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r})] \sin \omega t + \Im[\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r})] \cos \omega t\end{aligned}$$

Ecuatiile lui Maxwell in domeniul frecventa

$$\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \Im[\underline{A}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}]}{\partial t} = \Im[\underline{A}(\mathbf{r}) j\omega e^{j\omega t}]$$

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \\ \nabla \times \mathbf{H} = j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J}_f \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \end{matrix} \quad \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mu \mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = j\omega \epsilon \mathbf{E} + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \end{cases}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega \rho$$

Medii in domeniul frecventa

$$\rho = 0$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{0}$$

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} + \sigma\mathbf{E} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \end{cases}$$

$$\sigma \ll \omega\epsilon$$

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \end{cases}$$

Medii dispersive

$$\mathcal{D} = \varepsilon E + \varepsilon_1 \partial E / \partial t + \varepsilon_2 \partial^2 E / \partial t^2 + \varepsilon_3 \partial^3 E / \partial t^3 + \dots$$

$$\mathcal{B} = \mu H + \mu_1 \partial H / \partial t + \mu_2 \partial^2 H / \partial t^2 + \mu_3 \partial^3 H / \partial t^3 + \dots$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + j\omega \varepsilon_1 \mathbf{E} - \omega^2 \varepsilon_2 \mathbf{E} - j\omega^3 \varepsilon_3 \mathbf{E} + \dots$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + j\omega \mu_1 \mathbf{H} - \omega^2 \mu_2 \mathbf{H} - j\omega^3 \mu_3 \mathbf{H} + \dots$$

$$\mathbf{D} = (\varepsilon - \omega^2 \varepsilon_2 + \dots) \mathbf{E} - j(-\omega \varepsilon_1 + \omega^3 \varepsilon_3 - \dots) \mathbf{E} = [\varepsilon'(\omega) - j\varepsilon''(\omega)] \mathbf{E} = \underline{\varepsilon}(\omega) \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = (\mu - \omega^2 \mu_2 + \dots) \mathbf{H} - j(-\omega \mu_1 + \omega^3 \mu_3 - \dots) \mathbf{H} = [\mu'(\omega) - j\mu''(\omega)] \mathbf{H} = \underline{\mu}(\omega) \mathbf{H}$$

$$\underline{\varepsilon} = |\underline{\varepsilon}| e^{-j\delta} = |\underline{\varepsilon}| \cos \delta - j |\underline{\varepsilon}| \sin \delta \quad \tan \delta = \varepsilon'' / \varepsilon'$$

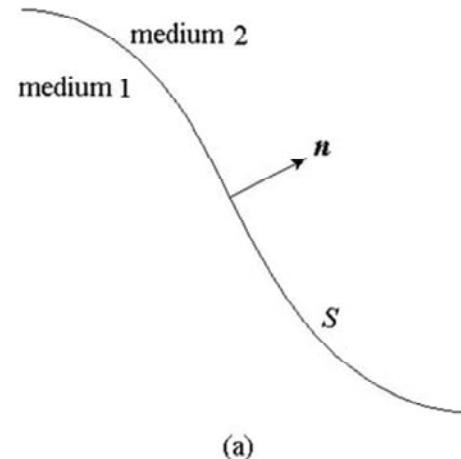
$$\underline{\mu} = |\underline{\mu}| e^{-j\theta} = |\underline{\mu}| \cos \theta - j |\underline{\mu}| \sin \theta \quad \tan \theta = \mu'' / \mu'$$

Curenti si sarcini magnetice

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t - \mathcal{J}_m \\ \nabla \times (\mathbf{B} / \mu_0) = \partial (\epsilon_0 \mathbf{E}) / \partial t + \mathcal{J} \\ \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m \end{cases}$$

Conditii pe frontiera

$$\begin{cases} \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = -\mathbf{J}_{mS} \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_s \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = \rho_{ms} \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = -j\omega\rho_s \\ \mathbf{n} \cdot (\mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_1) = -\partial\rho_s/\partial t \end{cases}$$



(a)

Perete electric

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = \rho_s$$

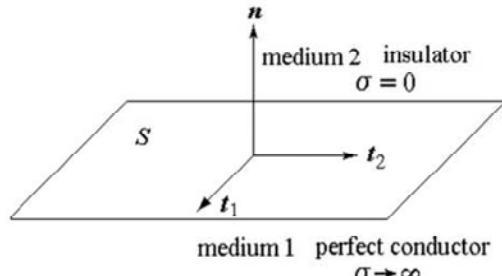
$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{E}_t|_S = 0 \\ \mathbf{H}_t|_S \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{E}_1 = \mathbf{H}_1 = \mathbf{D}_1 = \mathbf{B}_1 = 0 \\ \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}, \quad \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}, \quad \mathbf{D}_2 = \mathbf{D}, \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{B} \end{cases}$$



(b)

Orice suprafață pe care componenta tangențială a cimpului electric e electrică zero, iar componenta tangențială a cimpului magnetic este non-nula, se numește perete. Suprafața unui conductor perfect se comportă ca un perete electric.

Componenta tangențială a cimpului electric pe suprafața peretelui electric este zero, ceea ce înseamnă ca componenta tangențială a cimpului electric satisfăcă o condiție de frontieră de tip Dirichlet.

Perete magnetic

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = 0$$

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \times \mathbf{H} &= 0 \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E} &= -\mathbf{J}_{ms}\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{E}_t|_S \neq 0 \\ \mathbf{H}_t|_S = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = \rho_{ms}$$

Orice suprafață pe care componenta tangențială a cimpului magnetic este zero, iar componenta tangențială a cimpului electric este non-nula, se numește perete magnetic. Dacă considerăm frontieră dintre un mediu care este vidul și un mediu dielectric cu permisivitate mare, atunci suprafața vazuta privind spre vid poate fi aproximată cu un perete electric, iar suprafața vazuta privind spre dielectricul de mare permisivitate poate fi aproximată cu un perete magnetic.

Suprafata impedanta/admitanta

$$Z_s = \frac{E_t}{H_t} \quad Y_s = \frac{1}{Z_s} = \frac{H_t}{E_t}$$

Ecuatia undelor in domeniul timp - medii simple, uniforme -

Ecuatii de unda
neomogene

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho + \mu \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \mathcal{H} - \mu\sigma \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \mathbf{J}$$

Medii fara excitatii, conductivitate mica, frecventa mare:

$$\rho = 0, \mathbf{J} = 0, \sigma \approx 0$$

Ecuatii de unda
omogene

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \mathcal{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2} = 0$$

Medii fara excitatii, conductivitate mare, frecventa mica:

$$\rho = 0, \mathbf{J} = 0, \partial^2 / \partial t^2 = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$$

Ecuatii de difuzie
omogene

$$\nabla^2 \mathcal{H} - \mu\sigma \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0$$

$$\theta_i$$

Ecuatia undelor in domeniul frecventa - medii simple-

$$\nabla^2 \mathbf{E} - j\omega\mu\sigma\mathbf{E} + \omega^2\mu\epsilon\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon}\nabla\rho + j\omega\mu\mathbf{J}$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - j\omega\mu\sigma\mathbf{H} + \omega^2\mu\epsilon\mathbf{H} = -\nabla \times \mathbf{J}$$

$$k^2 = \omega^2\epsilon\mu - j\omega\mu\sigma$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon}\nabla\rho + j\omega\mu\mathbf{J}$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = -\nabla \times \mathbf{J}$$

$$\rho = 0, \mathbf{J} = \mathbf{0}$$

Ecuatii de unda
complexe

Ecuatii
Helmholtz

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0$$

$$\theta_i$$

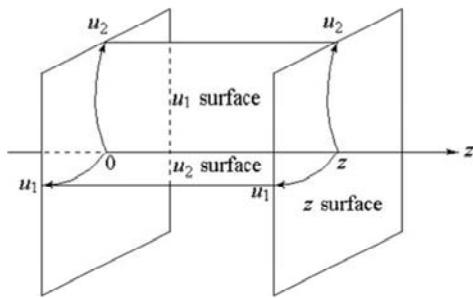
Rezolvarea ecuației Helmholtz - Metoda componetei longitudinale -

In coordonate cilindrice: $u_3 = z$

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0$$

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{E}_T + \hat{z} E_z \\ \mathbf{H} = \mathbf{H}_T + \hat{z} H_z \end{cases}$$



$$\begin{cases} \nabla = \nabla_T + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \\ \nabla_T = \hat{u}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} + \hat{u}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \\ \nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 \mathbf{A}_T + \hat{z} \nabla^2 A_z \end{cases}$$

Rezolvarea ecuației Helmholtz

- Metoda componetei longitudinale -

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{E}_T + k^2 \mathbf{E}_T = 0 \\ \nabla^2 \mathbf{H}_T + k^2 H_T = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{E}_T = \frac{\partial}{\partial z} \nabla_T E_z + j\omega \mu \hat{z} \times \nabla_T H_z \\ \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{H}_T = \frac{\partial}{\partial z} \nabla_T H_z - j\omega \epsilon \hat{z} \times \nabla_T E_z \end{cases}$$

Rezolvarea ecuației Helmholtz

- Metoda componetei longitudinale -

$$U_i(u_1, u_2, z) = U_{iT}(u_1, u_2) Z(z), i = 1, 2, z$$

$$\begin{cases} \nabla_T^2 \mathbf{E}_T + T^2 \mathbf{E}_T = 0 \\ \nabla_T^2 \mathbf{H}_T + T^2 H_T = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla_T^2 U_{zT} + T^2 U_{zT} = 0 \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \beta^2 Z = 0 \end{cases}$$

$$T^2 = k^2 - \beta^2$$

Rezolvarea ecuației Helmholtz

- Metoda componetei longitudinale -

$$U_i(u_1, u_2, z) = U_{iT}(u_1, u_2) Z(z), i = 1, 2, z$$

$$\begin{cases} \mathbf{E}_T = \frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \nabla_T E_z + j\omega\mu \hat{z} \times \nabla_T H_z \right) \\ \mathbf{H}_T = \frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \nabla_T H_z - j\omega\epsilon \hat{z} \times \nabla_T E_z \right) \end{cases} \quad \begin{cases} E_1 = \frac{1}{T^2} \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial^2 E_z}{\partial u_1 \partial z} - j\omega\mu \frac{1}{h_2} \frac{\partial H_z}{\partial u_2} \right) \\ E_2 = \frac{1}{T^2} \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial u_2 \partial z} + j\omega\mu \frac{1}{h_1} \frac{\partial H_z}{\partial u_1} \right) \\ H_1 = \frac{1}{T^2} \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial^2 H_z}{\partial u_1 \partial z} + j\omega\epsilon \frac{1}{h_2} \frac{\partial E_z}{\partial u_2} \right) \\ H_2 = \frac{1}{T^2} \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial u_2 \partial z} - j\omega\epsilon \frac{1}{h_1} \frac{\partial E_z}{\partial u_1} \right) \end{cases}$$

Rezolvarea ecuației Helmholtz

- Metoda componetei longitudinale -

$$U_z = E_z, H_z$$

$$U_z = U_{zT}(u_1, u_2) Z(z)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \beta^2 Z = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla_T^2 U_{zT} + T^2 U_{zT} = 0 \\ + cond. pe frontiera \end{array} \right.$$

Unde electromagnetice in coordonate cilindrice

- Metoda componentei longitudinale -

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \beta^2 Z = 0, \quad \begin{cases} Z(z) = Z_1 e^{-j\beta z} + Z_2 e^{+j\beta z} \\ \beta = \sqrt{k^2 - T^2} \end{cases}$$

B = Constanta de propagare in lungul axei z

$$\begin{cases} \nabla_T^2 U_{zT} + T^2 U_{zT} = 0 \\ + cond. pe frontiera \end{cases}$$

Unde electromagnetice in coordonate cilindrice circulare

$$\nabla_T^2 U_{zT} + T^2 U_{zT} = 0$$

$$u_1 = \rho, u_2 = \phi, u_3 = z \Rightarrow h_1 = h_3 = 1, h_2 = \rho$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U_T}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U_T}{\partial \phi^2} + T^2 U_T = 0$$

$$U_{zT}(\rho, \phi) = R(\rho)\Phi(\phi)$$

$$\frac{\rho d(\rho dR/d\rho)/d\rho}{R} + \frac{d^2\Phi/d\phi^2}{\Phi} = -T^2 \rho^2$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -\nu^2 \Phi$$

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + (T^2 \rho^2 - \nu^2) R = 0$$

Unde electromagnetice in coordonate cilindrice circulare

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -\nu^2 \Phi$$

$$\Phi(\phi) = c_\nu e^{j\nu\phi} + d_\nu e^{-j\nu\phi} = C_\nu \cos(\nu\phi) + D_\nu \sin(\nu\phi)$$

Unde electromagnetice in coordonate cilindrice circulare

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + (T^2 \rho^2 - \nu^2) R = 0$$

$$x = T\rho$$

$$x \frac{d}{dx} \left[x \frac{dR(x)}{dx} \right] + (x^2 - \nu^2) R(x) = 0$$

Solutii ale ecuatiei de tip Bessel niu fractionar

$$x \frac{d}{dx} \left[x \frac{dR(x)}{dx} \right] + (x^2 - \nu^2) R(x) = 0$$

Functii Bessel de tipul 1

$$\begin{cases} J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(\nu + m + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2m} \\ J_{-\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(-\nu + m + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2m} \end{cases}$$

Functii Bessel de tipul 2

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

Solutii ale ecuatiei de tip Bessel niu intreg

$$x \frac{d}{dx} \left[x \frac{dR(x)}{dx} \right] + (x^2 - \nu^2) R(x) = 0$$

Functii Bessel

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(n+m)} \left(\frac{x}{2} \right)^{n+2m}$$

Functii Neumann

$$\begin{aligned} N_n(x) &= \lim_{\nu \rightarrow n} N_\nu(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(x) - (-1)^n \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(x) \right]_{\nu=n} \end{aligned}$$

Solutii complexe ale ecuatiei de tip Bessel

$$x \frac{d}{dx} \left[x \frac{dR(x)}{dx} \right] + (x^2 - \nu^2) R(x) = 0$$

Functii Hankel de tip 1 si 2

$$\begin{cases} H_{\nu}^{(1)}(x) = J_{\nu}(x) + jN_{\nu}(x) \\ H_{\nu}^{(2)}(x) = J_{\nu}(x) - jN_{\nu}(x) \end{cases}$$

Solutii pentru R si T^2>0

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + (T^2 \rho^2 - \nu^2) R = 0$$

$$R(\rho) = a_\nu J_\nu(T\rho) + b_\nu J_{-\nu}(T\rho)$$

sau

$$R(\rho) = A_\nu J_\nu(T\rho) + B_\nu N_\nu(T\rho)$$

sau

$$R(\rho) = A_n J_n(T\rho) + B_n N_n(T\rho)$$

sau

$$R(\rho) = A_\nu H_\nu^{(1)}(T\rho) + B_\nu H_\nu^{(2)}(T\rho)$$

In fapt, oricare doua din functiile J, N, H1 sau H2, sunt liniar independente, deci o combinatie liniara a lor este un set complet de solutii a ecuatiei Bessel.

Solutii pentru R si T^2<0

$$T = j\tau$$

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) - (\tau^2 \rho^2 + \nu^2) R = 0$$

$$x \frac{d}{dx} \left[x \frac{dR(x)}{dx} \right] - (x^2 + \nu^2) R(x) = 0$$

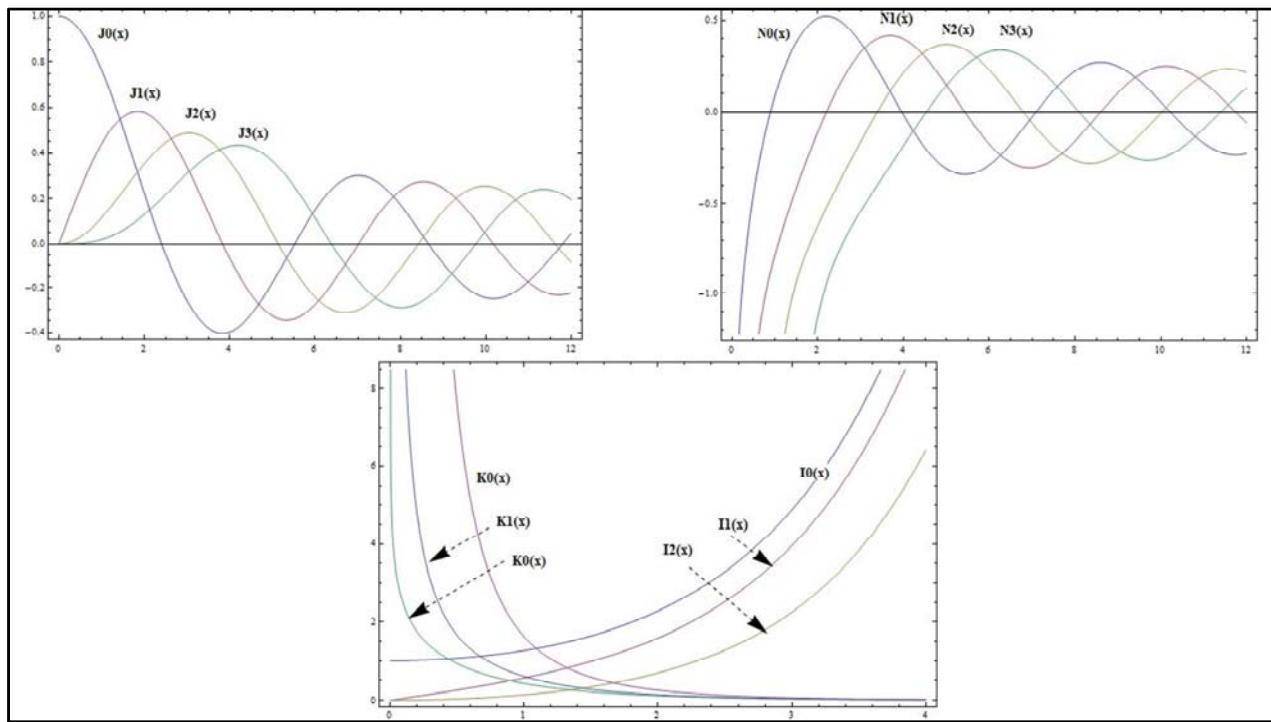
$$I_\nu(x) = j^{-\nu} J_\nu(x)$$

Functii Bessel modificate de tipul 1 si 2

$$\begin{cases} I_\nu(x) = j^{-\nu} J_\nu(x) \\ K_\nu(x) = j^{-\nu+1} \frac{\pi}{2} H_\nu^{(1)}(jx) = j^{-\nu+1} \frac{\pi}{2} [J_\nu(jx) + jN_\nu(jx)] \end{cases}$$

$$R(\rho) = A_\nu I_\nu(\tau\rho) + B_\nu K_\nu(\tau\rho)$$

In fapt, oricare doua din functiile J, N, H1 sau H2, sunt liniar independente, deci o combinatie liniara a lor este un set complet de solutii a ecuatiei Bessel.



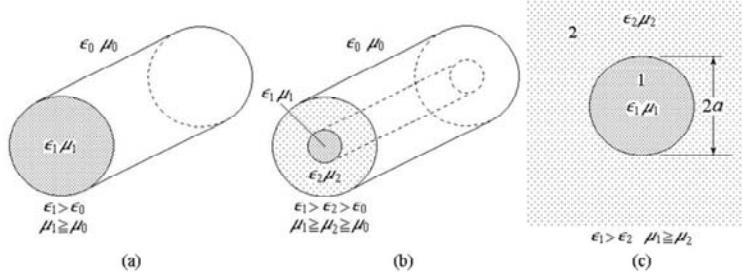
Funcțiile Bessel, funcțiile Neumann, funcțiile Hamkel și funcțiile Bessel modificate sunt functii armonice in coordonate cilindrice, asa cum sin si cos sunt functii armonice in coordonate rectangulare.

Funcțiile Bessel si Neumann sunt functii quasi-periodice cu zerouri multiple, similar functiilor sin si cos, care reprezinta unde stationare.

Funcțiile Bessel modificate sunt functii monotone, crescatoare sau descrescatoare, similar functiilor hiperbolice si exponentiale cu argument real. Ele descriu cimpurile descrescatoare.

Funcțiile Hankel sunt similare cu functiile exponentiale cu argument imaginari din coordonate rectangulare, care descriu undele progresive.

Fibra optica



$$U_z(\rho, \phi, z) = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$$

$$U_z = E_z, H_z$$

$$Z(z) = e^{-j\beta z} \quad \Phi(\phi) = e^{jn\phi} \quad R(\rho) = \begin{cases} AJ_n(T\rho) + A'N_n(T\rho), & \rho \leq a \\ CK_n(\tau\rho) + C'I_n(\tau\rho), & \rho > a \end{cases}$$

Cele mai promitatoare giduri optice sunt fibrele optice cu salt de indice si indice gradat. Teoria electromagnetică a fibrelor cu indice gradat se referă la propagarea undelor medii neuniforme și nu o detaliem aici. Fibra optică constă dintr-un miez de material dielectric avind indicele de refracție n_1 și o teacă dintr-un material dielectric diferit a carui indice de refracție n_2 este cu puțin mai mic decât n_1 , ca în Fig.b.

Considerind condițiile de frontieră, cimpurile vor trebui să fie finite pe axa fibrei, $r_0 = 0$, și să scadă la zero pentru $r_0 = \infty$. Deoarece N are o singularitate pentru $r_0 = 0$, $R(0)$ poate fi finit doar dacă $A' = 0$. Similar, $R(r_0)$ se anulează la infinit doar dacă $C' = 0$.

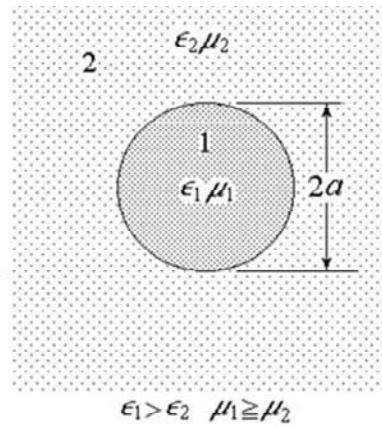
Modurile de propagare sunt unde stationare radiale cu dependență de tip funcții Bessel în miez, și unde evanescente radiale cu dependență de tip funcții Bessel modificate în teacă. Grosimea tecii este suficient de mare astfel încât cimpurile să fie suficiente de mici în afara tecii.

Presupunem că teacă se extinde la infinit. Astfel, modelul fizico-matematic al fibrei optice cu salt de indice este cel al ghidului dielectric circular, Fig.c

Ghid dielectric cilindric

$$\begin{cases}
 E_{z1} = AT^2 J_n(T\rho) e^{jn\phi} e^{-j\beta z} \\
 H_{z1} = BT^2 J_n(T\rho) e^{jn\phi} e^{-j\beta z} \\
 E_{\rho 1} = \left[-j\beta TAJ'_n(T\rho) + \frac{\omega\mu_1 n}{\rho} BJ_n(T\rho) \right] e^{jn\phi} e^{-j\beta z} \\
 E_{\phi 1} = \left[j\omega\mu_1 TBJ'_n(T\rho) + \frac{\beta n}{\rho} AJ_n(T\rho) \right] e^{jn\phi} e^{-j\beta z} \\
 H_{\rho 1} = \left[-j\beta TBJ'_n(T\rho) - \frac{\omega\epsilon_1 n}{\rho} AJ_n(T\rho) \right] e^{jn\phi} e^{-j\beta z} \\
 H_{\phi 1} = \left[-j\omega\epsilon_1 TAJ'_n(T\rho) + \frac{\beta n}{\rho} BJ_n(T\rho) \right] e^{jn\phi} e^{-j\beta z}
 \end{cases}$$

Miez - 1

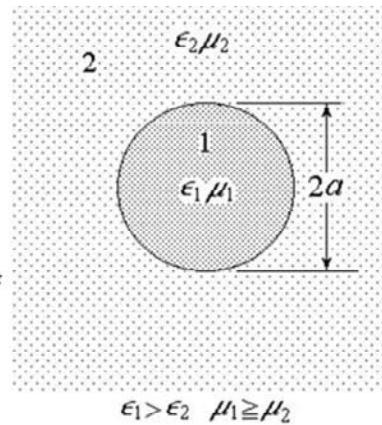


In miez, $0 < \rho < a$, dependenta de ρ este unic determinata de functiile Bessel de tip 1, coeficientii functiilor Neumann trebuind sa fie zero pentru ca axa $\rho=0$ este inclusa in regiunea 1. Dependenta unghiulara trebuie sa fie de tipul $\exp(jn\phi)$, unde n este un intreg, deoarece intrega regiune este inclusa in regiune. Dependenta longitudinala de z este presupusa $\exp(-j\beta z)$, pentru unde care se propaga in directia $+z$.

Ghid dielectric cilindric

$$\begin{cases}
 E_{z2} = -C\tau^2 K_n(\tau\rho) e^{jn\phi} e^{-j\beta z} \\
 H_{z2} = -D\tau^2 K_n(\tau\rho) e^{jn\phi} e^{-j\beta z} \\
 E_{\rho 2} = \left[-j\beta\tau CK_n'(\tau\rho) + \frac{\omega\mu_2 n}{\rho} DK_n(\tau\rho) \right] e^{jn\phi} e^{-j\beta z} \\
 E_{\phi 2} = \left[j\omega\mu_2 \tau DK_n'(\tau\rho) + \frac{\beta n}{\rho} CK_n(\tau\rho) \right] e^{jn\phi} e^{-j\beta z} \\
 H_{\rho 2} = \left[-j\beta\tau DK_n'(\tau\rho) - \frac{\omega\epsilon_2 n}{\rho} CK_n(\tau\rho) \right] e^{jn\phi} e^{-j\beta z} \\
 H_{\phi 2} = \left[-j\omega\epsilon_2 \tau CK_n'(\tau\rho) + \frac{\beta n}{\rho} DK_n(\tau\rho) \right] e^{jn\phi} e^{-j\beta z}
 \end{cases}$$

Teaca- 2

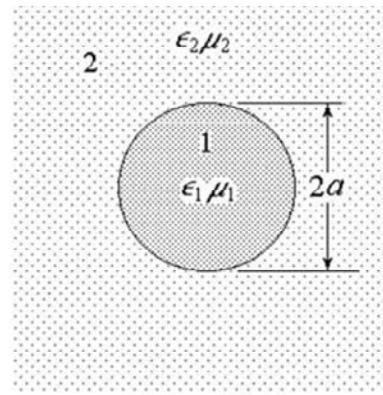


In teaca, $a < \infty$, dependenta de ρ este unica determinata de functia Bessel modificata de tip 2, K , iar coeficientii functiei I trebuie sa fie zero deoarece $\rho \rightarrow \infty$ nu este inclus in regiune. Dependenta unghiulara si dependenta longitudinala a functiilor de unda trebuie sa fie aceleasi ca in regiunea 1.

Ghid dielectric cilindric

$$\begin{cases} \beta^2 + T^2 = k_1^2 = \omega^2 \epsilon_1 \mu_1 = k_0^2 n_1^2 \\ \beta^2 - \tau^2 = k_2^2 = \omega^2 \epsilon_2 \mu_2 = k_0^2 n_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_{z1}(a) = E_{z2}(a) \\ H_{z1}(a) = H_{z2}(a) \\ E_{\phi 1}(a) = E_{\phi 2}(a) \\ H_{\phi 1}(a) = H_{\phi 2}(a) \end{cases}$$



$$\epsilon_1 > \epsilon_2 \quad \mu_1 \geq \mu_2$$

$$\begin{vmatrix} T^2 J_n(Ta) & 0 & \tau^2 K_n(\tau a) & 0 \\ 0 & T^2 J_n(Ta) & 0 & \tau^2 K_n(\tau a) \\ \frac{\beta n}{a} J_n(Ta) & j\omega \mu_1 T J_n'(Ta) & -\frac{\beta n}{a} K_n(\tau a) & -j\omega \mu_2 \tau K_n'(ta) \\ -j\omega \epsilon_1 T J_n'(Ta) & \frac{\beta n}{\rho} J_n(T \rho a) & j\omega \epsilon_2 \tau K_n'(ta) & \frac{\beta n}{\rho} K_n(\tau a) \end{vmatrix} = 0$$

Aceasta este ecuatia generala de valori proprii a ghidului de unda dielectric circular.

Ghid dielectric cilindric

$$\left[\left[\frac{\varepsilon_1 J_n'(Ta)}{Ta J_n(Ta)} + \frac{\varepsilon_2 K_n'(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)} \right] \left[\frac{\mu_1 J_n'(Ta)}{Ta J_n(Ta)} + \frac{\mu_2 K_n'(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)} \right] - n^2 \left[\frac{\varepsilon_1 \mu_1}{(Ta)^2} + \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{(\tau a)^2} \right] \right] \left[\frac{1}{(Ta)^2} + \frac{1}{(\tau a)^2} \right] = 0$$
$$(Ta)^2 + (\tau a)^2 = k_1^2 - k_2^2 = \omega^2 a^2 (\mu_1 \varepsilon_1 - \mu_2 \varepsilon_2)$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ T, \tau \end{array}$$

$$V = \omega a \sqrt{(\mu_1 \varepsilon_1 - \mu_2 \varepsilon_2)}$$

V = frecventa normalizata pentru ghidul dielectric cilindric

Ghid dielectric cilindric

$$\frac{C}{A} = \frac{D}{B} = -\frac{T^2 J_n(Ta)}{\tau^2 K_n(\tau a)}$$

$$\frac{H_z}{E_z} = \frac{B}{A} = \frac{D}{C} = \frac{j\beta\chi}{\omega\mu_0} = j\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}J'_n(Ta)}{TaJ_n(Ta)} + \frac{\varepsilon_{r2}K'_n(\tau a)}{\tau aK_n(\tau a)}}}{\sqrt{\frac{\mu_{r1}J'_n(Ta)}{TaJ_n(Ta)} + \frac{\mu_{r2}K'_n(\tau a)}{\tau aK_n(\tau a)}}}$$

$$\begin{cases} Z_n(x) = \frac{x}{2n} [Z_{n-1}(x) + Z_{n+1}(x)] \\ Z_n'(x) = \frac{1}{2} [Z_{n-1}(x) - Z_{n+1}(x)] \end{cases}; Z_n(x) = J_n(x), N_n(x), H_n^{(1)}(x), H_n^{(2)}(x)$$

Aplicind relatiile si recurentele din slide obtinem expresiile componentelor cimpurilor in miez si teaca.

Cimpurile in miez

$$\begin{aligned}
 E_{\rho 1} &= j\beta T A \left[\frac{1+\mu_{r1}\chi}{2} J_{n+1}(T\rho) - \frac{1-\mu_{r1}\chi}{2} J_{n-1}(T\rho) \right] e^{jn\phi} e^{-j\beta z} \\
 E_{\phi 1} &= \beta T A \left[\frac{1+\mu_{r1}\chi}{2} J_{n+1}(T\rho) + \frac{1-\mu_{r1}\chi}{2} J_{n-1}(T\rho) \right] e^{jn\phi} e^{-j\beta z} \\
 E_{z1} &= T^2 A J_n(T\rho) e^{jn\phi} e^{-j\beta z} \\
 H_{\rho 1} &= -\frac{\beta^2 T A}{\omega \mu_0} \left[\frac{\chi + \frac{k^2}{\beta^2} \varepsilon_{r1}}{2} J_{n+1}(T\rho) - \frac{\chi - \frac{k^2}{\beta^2} \varepsilon_{r1}}{2} J_{n-1}(T\rho) \right] e^{jn\phi} e^{-j\beta z} \\
 H_{\phi 1} &= j \frac{\beta^2 T A}{\omega \mu_0} \left[\frac{\chi + \frac{k^2}{\beta^2} \varepsilon_{r1}}{2} J_{n+1}(T\rho) + \frac{\chi - \frac{k^2}{\beta^2} \varepsilon_{r1}}{2} J_{n-1}(T\rho) \right] e^{jn\phi} e^{-j\beta z} \\
 H_{z1} &= j \frac{T^2 \beta \chi}{\omega \mu_0} A J_n(T\rho) e^{jn\phi} e^{-j\beta z}
 \end{aligned}$$

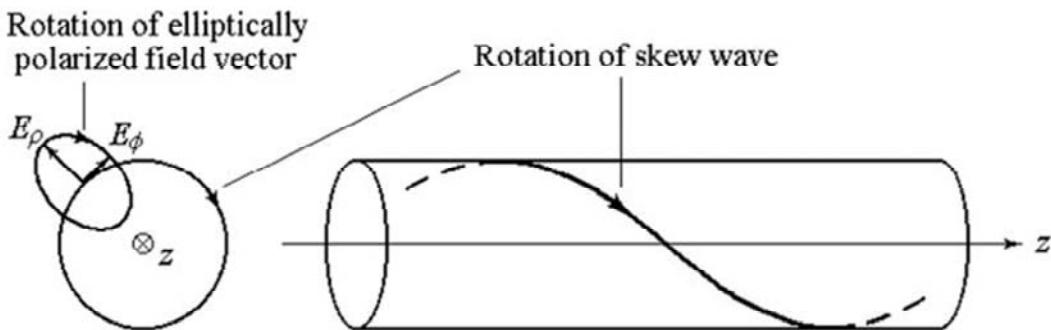
$$\begin{cases} \chi = \frac{\omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{\beta} \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_{r1} J_n'(Ta)}{Ta J_n(Ta)} + \frac{\varepsilon_{r2} K_n'(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)}}}{\sqrt{\frac{\mu_{r1} J_n'(Ta)}{Ta J_n(Ta)} + \frac{\mu_{r2} K_n'(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)}}} \\ k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \end{cases}$$

Cimpurile in teaca

$$\begin{cases}
 E_{\rho 2} = j\beta\tau C \left[\frac{1+\mu_{r2}\chi}{2} K_{n+1}(\tau\rho) + \frac{1-\mu_{r2}\chi}{2} K_{n-1}(\tau\rho) \right] e^{jn\phi} e^{-j\beta z} \\
 E_{\phi 2} = \beta\tau C \left[\frac{1+\mu_{r2}\chi}{2} K_{n+1}(T\rho) - \frac{1-\mu_{r2}\chi}{2} K_{n-1}(\tau\rho) \right] e^{jn\phi} e^{-j\beta z} \\
 E_{z2} = \tau^2 C K_n(\tau\rho) e^{jn\phi} e^{-j\beta z} \\
 H_{\rho 2} = -\frac{\beta^2 \tau C}{\omega \mu_0} \left[\frac{\chi + \frac{k^2}{\beta^2} \varepsilon_{r2}}{2} K_{n+1}(\tau\rho) + \frac{\chi - \frac{k^2}{\beta^2} \varepsilon_{r2}}{2} K_{n-1}(\tau\rho) \right] e^{jn\phi} e^{-j\beta z} \\
 H_{\phi 2} = j \frac{\beta^2 \tau C}{\omega \mu_0} \left[\frac{\chi + \frac{k^2}{\beta^2} \varepsilon_{r2}}{2} K_{n+1}(\tau\rho) - \frac{\chi - \frac{k^2}{\beta^2} \varepsilon_{r2}}{2} K_{n-1}(\tau\rho) \right] e^{jn\phi} e^{-j\beta z} \\
 H_{z2} = -j \frac{\tau^2 \beta \chi}{\omega \mu_0} C K_n(\tau\rho) e^{jn\phi} e^{-j\beta z}
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 \chi = \frac{\omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{\beta} \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_{r1} J_n'(Ta)}{Ta J_n(Ta)} + \frac{\varepsilon_{r2} K_n'(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)}}}{\sqrt{\frac{\mu_{r1} J_n'(Ta)}{Ta J_n(Ta)} + \frac{\mu_{r2} K_n'(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)}}} \\
 k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0
 \end{cases}$$

Cimpurile in teaca



Privind la relatiile dintre componente transversale E_ρ si E_ϕ , sau H_ρ si H_ϕ , gasim ca, cimpurile transversale sunt polarizate eliptic.

Modurile pentru $n = 0$ reprezinta moduri axiale simetrice (moduri meridionale).

Modurile cu n diferit de zero reprezinta moduri axiale asimetrice (moduri oblice). Modurile oblice cu n pozitiv sau negativ reprezinta moduri oblice care se rotesc in sens invers acelor de ceasornic (regula minii stungi) sau in sensul acelor de ceasornic (regula minii drepte).

De notat ca, directia de rotire a modurilor oblice si directia de rotire a vectorilor cimpului polarizat sunt notiuni complet diferite.

Din ecuatia pentru valorile proprii vedem ca, conditiile de taiere si relatiile de dispersie sunt aceleasi pentru $+n$ si $-n$:

$\Tau(-n) = \Tau(+n)$ si $\Beta(-n) = \Beta(+n)$.

Prin urmare, undele oblice rotitoare in sensul acelor si invers, ce corespund functiilor $\text{Exp}(-jn*\phi)\text{Exp}(-jz*\Beta(-n))$ si $\text{Exp}(jn*\phi)\text{Exp}(-jz*\Beta(n))$, pot fi compuse in doua unde stationare mutual ortogonale unghiular: $\sin(n*\phi)\text{Exp}(-jz*\Beta(n))$ si $\cos(n*\phi)\text{Exp}(-jz*\Beta(n))$, cu directie de polarizare stationara. Aceasta este o caracteristica a tuturor ghidurilor facute din materiale izotrope si cu frontiere isotropice.

Rezolvarea ecuatiei de valori proprii Conditia de taiere

$$\begin{cases} \tau = 0 \\ T = T_c \end{cases}$$

$$(T_c)^2 = \omega_c^2 (\mu_1 \epsilon_1 - \mu_2 \epsilon_2)$$

$$\omega_c = \frac{T_c}{\sqrt{\mu_1 \epsilon_1 - \mu_2 \epsilon_2}}$$

Conditia de taiere a ghidului dielectric circular uniform este Tau = 0

Daca frecventa de functionare omega este mai mare decit frecventa de taiere omega_c, atunci $T^2 < T_c^2$, tau^2 > 0, deci tau este real. In acest caz, dependenta radiala a cimpurilor in teaca va fi de tipul functiilor Bessel modificate de tipul 2, ceea ce inseamna ca cimpurile sunt functii descrescatoare in raport cu ro si de tip progresiv in lungul lui z. Aceasta este modul ghidat.

Daca frecventa de functionare omega este mai mica decit frecventa de taiere omega_c, atunci $T^2 > T_c^2$, tau^2 < 0, deci tau este imaginari. In acest caz, dependenta radiala a cimpurilor in teaca va fi de tipul functiilor Bessel modificate de tipul 2, cu argument imaginari, care se reduc la functii Hankel de tipul 2. ceea ce reprezinta unde progresive radiale. Aceasta este modul radiativ. In acest caz, miezul dielectric actioneaza ca o antena cilindrica care radiaza energie spre exterior.

Rezolvarea ecuatiei de valori proprii

$$\left[\frac{J_n'(Ta)}{TaJ_n(Ta)} \right]^2 + \left[\frac{\varepsilon_1\mu_2 + \varepsilon_2\mu_1}{\varepsilon_1\mu_1} \frac{K_n'(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)} \right] \frac{J_n'(Ta)}{TaJ_n(Ta)} \\ + \frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1} \left[\frac{K_n'(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)} \right]^2 - n^2 \left[\frac{1}{(Ta)^2} + \frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1(\tau a)^2} \right] \left[\frac{1}{(Ta)^2} + \frac{1}{(\tau a)^2} \right] = 0$$

$$\frac{J_n'(Ta)}{TaJ_n(Ta)} = -P + \sqrt{R} \quad \text{Pentru moduri EH}$$

$$P = \frac{\varepsilon_1\mu_2 + \varepsilon_2\mu_1}{\varepsilon_1\mu_1} \frac{K_n'(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)}$$

$$\frac{J_n'(Ta)}{TaJ_n(Ta)} = -P - \sqrt{R} \quad \text{Pentru moduri HE}$$

$$R = \left(\frac{\varepsilon_1\mu_2 - \varepsilon_2\mu_1}{2\varepsilon_1\mu_1} \right)^2 \left[\frac{K_n'(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)} \right]^2 - n^2 \left[\frac{1}{(Ta)^2} + \frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1(\tau a)^2} \right] \left[\frac{1}{(Ta)^2} + \frac{1}{(\tau a)^2} \right]$$

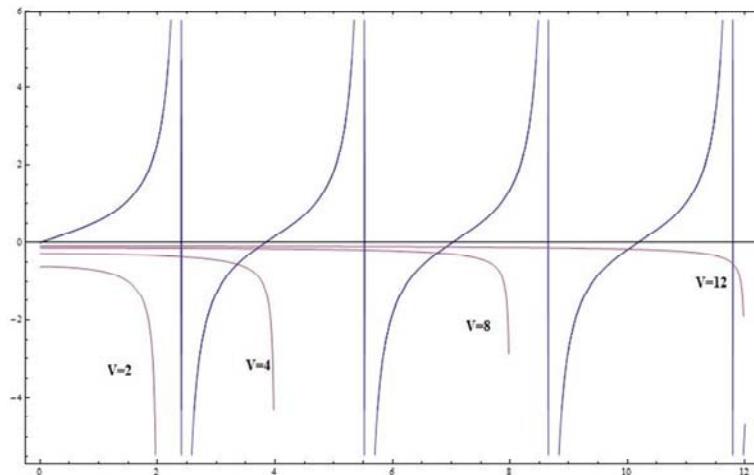
Ecuatia de valori proprii poate fi pusa sub forma quadratica din slide.

Radacinile acestei ecuatii sunt:.....

Rezolvarea ecuatiei de valori proprii

$$\tau a = \sqrt{(k_1 a)^2 - (k_2 a)^2 - (Ta)^2} = \sqrt{\omega^2 a (\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2) - (Ta)^2} = \sqrt{V^2 - (Ta)^2}$$

$$\frac{J_n'(Ta)}{Ta J_n(Ta)} = -P \pm \sqrt{R}$$

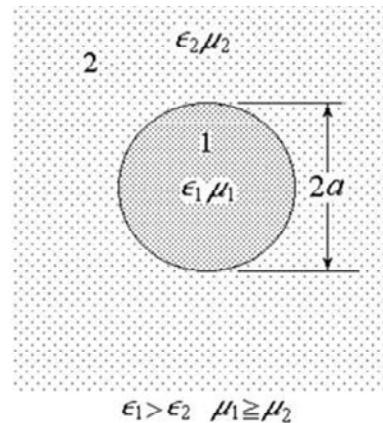


Ecuatiile de mai sus pot fi rezolvate grafic reprezentind ambii membri in functie de Ta , folosind expresia pentru tau*a data pe slide (asa cum se sugereaza pe figura). Modurile proprii in ghidurile dielectrice circulare sunt modurile TE0m, TM0m si modurile HEMnm; modurile HEMnm pot fi clasificate, la rindul lor, in moduri EHnm si Hnm. Modurile sunt TE0m sau EHnm daca alegem semnul plus in fata radicalului si TM0m sau HNm daca alegem semnul minus in fata radicalului.

Ghid dielectric cilindric

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = 0 \quad \text{Moduri TE si TM}$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \neq 0 \quad \text{Moduri HEM}$$



In ghidul dielectric cilindric uniform, doar cind cimpurile sunt uniforme pe directiile transversal tangențiale ale frontierei, modurile TE și TM pot exista independent. Acest lucru corespunde la moduri axial simetrice sau raze meridionale. Cind cimpurile nu sunt uniforme în direcția ϕ , modurile proprii trebuie să fie hibride, astănuitele moduri HEM., care corespund la moduri axial asimetrice sau skew rays.

Modurile TE si TM

Simetrie circulara: $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0 \Leftrightarrow n = 0$

$$\begin{cases} J_0'(x) = -J_1(x) \\ K_0'(x) = -K_1(x) \end{cases}$$

$$\left[\frac{\varepsilon_1 J_1(Ta)}{Ta J_0(Ta)} + \frac{\varepsilon_2 K_1(\tau a)}{\tau a K_0(\tau a)} \right] \left[\frac{\mu_1 J_1(Ta)}{Ta J_0(Ta)} + \frac{\mu_2 K_1(\tau a)}{\tau a K_0(\tau a)} \right] = 0$$

$$\begin{cases} \frac{J_1(Ta)}{J_0(Ta)} = -\frac{\varepsilon_2 Ta K_1(\tau a)}{\varepsilon_1 \tau a K_0(\tau a)} \\ \frac{J_1(Ta)}{J_0(Ta)} = -\frac{\mu_2 Ta K_1(\tau a)}{\mu_1 \tau a K_0(\tau a)} \end{cases}$$

Pentru moduri TM

Pentru moduri TE

Modurile TE si TM există doar cind cimpurile în secțiunea transversală sunt circular simetrice

Modurile TE si TM

$$\chi = \frac{\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{\beta} \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_{r1} J_1(Ta)}{Ta J_0(Ta)} + \frac{\epsilon_{r2} K_1(\tau a)}{\tau a K_0(\tau a)}}}{\sqrt{\frac{\mu_{r1} J_1(Ta)}{Ta J_0(Ta)} + \frac{\mu_{r2} K_1(\tau a)}{\tau a K_0(\tau a)}}}$$

$$k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$$

$$\frac{H_z}{E_z} = \frac{j\beta\chi}{\omega\mu_0}$$

Pentru moduri TM $\chi \rightarrow 0 \Rightarrow H_z = 0$

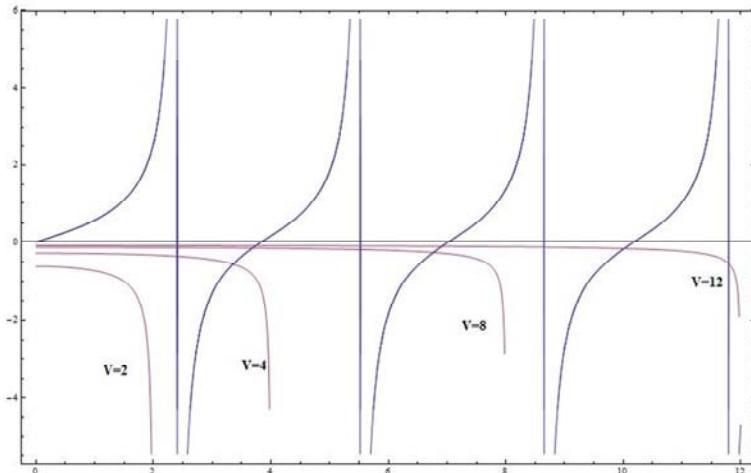
Pentru moduri TE $\chi \rightarrow \infty \Rightarrow E_z = 0$

Modurile TE si TM

$$\begin{cases} \frac{J_1(Ta)}{J_0(Ta)} = -\frac{\varepsilon_2 Ta K_1(\tau a)}{\varepsilon_1 \tau a K_0(\tau a)} \\ \frac{J_1(Ta)}{J_0(Ta)} = -\frac{\mu_2 Ta K_1(\tau a)}{\mu_1 \tau a K_0(\tau a)} \end{cases}$$

$$0 \leq Ta \leq V$$

$$V = \omega a \sqrt{(\mu_1 \varepsilon_1 - \mu_2 \varepsilon_2)}$$



In partea stanga a ecuatiilor avem $J_1(Ta)/J_0(Ta)$, care porneste de la 0 la $Ta=0$ si creste monoton spre infinit. Pentru primul zero al lui $J_0(Ta)$ care are loc pentru $Ta = 2.405$. Peste aceasta valoare, $J_1(Ta)/J_0(Ta)$ variaza de la minus infinit la plus infinit intre zorourile lui $J_0(Ta)$. Pentru valori mari ale lui Ta , $J_1(Ta)/J_0(Ta)$ variaza asimptotic ca si $-\tan(Ta - \pi/4)$. Pentru membrul drept, modurile ghidate cer ca tau sa fie real pentru a avea o descrestere exponentiala a cimpurilor in teaca. Corespunzator, $(\Tau^*a)^2$ nu este niciodata negativ si, Ta trebuie sa satisfaca $0 < Ta < V$, unde V este frecventa normalizata pentru ghidurile cilindrice circulare. Membrul drept este tot timpul negativ si variaza monoton descrescator cu Ta .

Condițiile de taiere pentru modurile TE și TM

$$\tau = 0, n = 0$$

$$\lim_{\tau a \rightarrow 0} \frac{\tau a K_0(\tau a)}{K_1(\tau a)} = \lim_{\tau a \rightarrow 0} \left[(\tau a)^2 \ln \frac{2}{\gamma \tau a} \right] = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon_2 T a J_0(T a)}{\varepsilon_1 J_1(T a)} = 0 \\ \frac{\mu_2 T a J_0(T a)}{\mu_1 J_1(T a)} = 0 \end{cases}$$

$x_{01} = 2.405$
 $x_{02} = 5.520$
 $x_{03} = 8.654$

$$J_0(T a) = 0, T_c = \frac{x_{0m}}{a}, \omega_c = \frac{x_{0m}}{a \sqrt{(\mu_1 \varepsilon_1 - \mu_2 \varepsilon_2)}}$$

$x_{0m} \approx \left(m - \frac{1}{4}\right) \pi, m \geq 4$

Condițiile de taiere pentru modurile TM_{0m} și TE_{0m} sunt aceleasi, doar ecuația de valori proprii, adica caracteristicile de dispersie sunt diferite.

Modul TM cel mai mic este TM₀₁ și cel mai mic mod TE este TE₀₁. Acestea nu sunt modurile cele mai mici.

Ghidul dielectric circular nemagnetic

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$$

$$\left[\frac{\varepsilon_1 J_n'(Ta)}{TaJ_n(Ta)} + \frac{\varepsilon_2 K_n'(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)} \right] \left[\frac{J_n'(Ta)}{TaJ_n(Ta)} + \frac{K_n'(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)} \right] - n^2 \left[\frac{\varepsilon_1}{(Ta)^2} + \frac{\varepsilon_2}{(\tau a)^2} \right] \left[\frac{1}{(Ta)^2} + \frac{1}{(\tau a)^2} \right] = 0$$

$$\left[\frac{\varepsilon_1 J_{n+1}(Ta)}{TaJ_n(Ta)} + \frac{\varepsilon_2 K_{n+1}(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)} \right] \left[\frac{J_{n-1}(Ta)}{TaJ_n(Ta)} - \frac{K_{n-1}(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)} \right]$$

$$+ \left[\frac{\varepsilon_1 J_{n-1}(Ta)}{TaJ_n(Ta)} - \frac{\varepsilon_2 K_{n-1}(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)} \right] \left[\frac{J_{n+1}(Ta)}{TaJ_n(Ta)} + \frac{K_{n+1}(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)} \right] = 0$$

$$\frac{J_{n+1}(Ta)}{J_n(Ta)} = Ta \left[P + \frac{n}{(Ta)^2} - \sqrt{R} \right] \quad \text{Pentru moduri EH}$$

$$V = \omega a \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 (\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2})} = k_0 a \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \approx k_0 a \sqrt{2\Delta}$$

$$\frac{J_{n-1}(Ta)}{J_n(Ta)} = Ta \left[-P + \frac{n}{(Ta)^2} - \sqrt{R} \right] \quad \text{Pentru moduri HE}$$

$$b = \frac{\beta/k_0 - n_2}{n_1 - n_2} = \frac{\bar{n} - n_2}{n_1 - n_2} = \text{constantă de propagare normalizată}$$

Aceasta este ecuația de valori proprii pentru ghidurile dielectrice circulare nemagnetice.

Ghidul dielectric circular nemagnetic

$$\frac{J_{n+1}(Ta)}{J_n(Ta)} = Ta \left[P + \frac{n}{(Ta)^2} - \sqrt{R} \right] \quad \text{Pentru moduri EH}$$

$$\frac{J_{n-1}(Ta)}{J_n(Ta)} = Ta \left[-P + \frac{n}{(Ta)^2} - \sqrt{R} \right] \quad \text{Pentru moduri HE}$$

$$P = \frac{\bar{\epsilon}}{\epsilon_1} \frac{K_n'(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)} = \frac{\bar{\epsilon}}{\epsilon_1} \left[\frac{n}{(\tau a)^2} - \frac{K_{n+1}(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)} \right] = \frac{\bar{\epsilon}}{\epsilon_1} \left[-\frac{n}{(\tau a)^2} - \frac{K_{n-1}(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)} \right]$$

$$R = \left(\frac{\Delta \epsilon}{\epsilon_1} \right)^2 \left[\frac{K_n'(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)} \right]^2 + n^2 \left[\frac{1}{(Ta)^2} + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 (\tau a)^2} \right] \left[\frac{1}{(Ta)^2} + \frac{1}{(\tau a)^2} \right] \quad \bar{\epsilon} = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}$$

$$= \left\{ \frac{\Delta \epsilon}{\epsilon_1} \left[\frac{n}{(\tau a)^2} - \frac{K_{n+1}(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)} \right] \right\}^2 + n^2 \left[\frac{1}{(Ta)^2} + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 (\tau a)^2} \right] \left[\frac{1}{(Ta)^2} + \frac{1}{(\tau a)^2} \right] \quad \Delta \epsilon = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2}$$

$$= \left\{ \frac{\Delta \epsilon}{\epsilon_1} \left[-\frac{n}{(\tau a)^2} - \frac{K_{n-1}(\tau a)}{\tau a K_n(\tau a)} \right] \right\}^2 + n^2 \left[\frac{1}{(Ta)^2} + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 (\tau a)^2} \right] \left[\frac{1}{(Ta)^2} + \frac{1}{(\tau a)^2} \right]$$

Aceasta este ecuatia de valori proprii pentru ghidurile dielectrice circulare nemagnetice.

Ghidul dielectric circular nemagnetic

$$n = 1$$

$$\frac{J_2(Ta)}{J_1(Ta)} = Ta \left[P + \frac{1}{(Ta)^2} - \sqrt{R} \right] \quad \text{Pentru moduri EH}$$

$$\frac{J_0(Ta)}{J_1(Ta)} = Ta \left[-P + \frac{1}{(Ta)^2} - \sqrt{R} \right] \quad \text{Pentru moduri HE}$$

$$P = \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_1} \left[\frac{1}{(\tau a)^2} - \frac{K_2(\tau a)}{\tau a K_1(\tau a)} \right] \quad R = \left\{ \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon_1} \left[\frac{1}{(\tau a)^2} - \frac{K_2(\tau a)}{\tau a K_1(\tau a)} \right] \right\}^2 + \left[\frac{1}{(Ta)^2} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 (\tau a)^2} \right] \left[\frac{1}{(Ta)^2} + \frac{1}{(\tau a)^2} \right]$$

$$J_1(Ta) = 0, \begin{cases} Ta = 0 & x_{11} = 3.83171 \\ T_c a = x_{1m'} = V \Rightarrow \omega_c = \frac{x_{1m'}}{a \mu_0 \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}} & x_{12} = 7.01559 \quad x_{1m} \approx \left(m + \frac{1}{4} \right) \pi, m \geq 4 \\ & x_{13} = 10.1735 \end{cases}$$

Pentru $n = 1$ liniile care reprezinta ambii membri ai relatiei pentru EH1m sunt similare cu cele pentru modurile TE si TM, cu exceptia faptului ca asymptotele verticale sunt pozitionate pe zerourile functiei J_1 .

Modul HE11 exista pentru orice valoare a lui V , adica acest mod are frecventa de taiere zero.

Celelalte moduri, EH1m si HE1m, au frecventa de taiere data de relatia de pe slide, cu $m' = m$ pentru EH1m si $m' = m-1$ pentru HE1m.

Deoarece $Ta = 0$ este prima radacina a ecuatiei, modul HE11 este modul fundamental de propagare pe ghidul dielectric cilindric nemagnetic.

Fibre monomod

$$J_0(T_c a) = J_0(V_c) = 0$$

$$V < 2.405$$

$$\omega a \sqrt{\mu_0 (\epsilon_1 - \epsilon_2)} < 2.405 \quad \frac{2\pi}{\lambda} c a \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 (\epsilon_{r1} - \epsilon_{r2})} < 2.405$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} a \sqrt{n_1^2 - n_2^2} < 2.405 \quad \boxed{\frac{2\pi}{\lambda} a n_1 \sqrt{2\Delta} < 2.405}$$

$$\lambda = 1.2 \mu m, n_1 = 1.45, \Delta = 5 \times 10^{-3} \quad a < \frac{2.405 * 1.2}{2\pi 1.45 \cdot \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}} = 3.16 \mu m$$

Fibrele monomod sunt aceleia care suporta doar modul fundamental de propagare, HE11. Fibra este astfel proiectata incit toate modurile superioare sa fie taiate la lungimea de unda de utilizare a fibrei. Parametru V (frecventa normalizata) determina numarul de moduri pe fibra.

Conditia de monomod este determinata de valoarea lui V la care modurile TE01 si TM01 sunt la taiere. Aceasta conditie este $J_0(V)=0$. Cea mai mica valoare a lui V pentru care $J_0 = 0$ este 2.405. Pentru $V < 2.405$, fibra nu suporta decit modul fundamental HE11.

Estimare raza miez

Pentru lungimi de unda intre 1.3 si 1.6 microni, fibra este proiectata, de regula, sa devina monomod pentru pentru lamda > 1.2 microni. Rezulta o raza a miezului $a < 3.16$ microni. Raza miezului poate fi marita la 4 microni (dimensiunea uzuala) daca reducem delta la 3×10^{-3} .

Cimpurile in fibra monomod (HE₁₁)

$$\frac{n_1 - n_2}{n_1} = \Delta \ll 1 \quad \text{Fibra slab ghidata} \quad \varepsilon_1 \approx \varepsilon_2, \beta \approx k_1$$

$n = +1, \chi = -1$

$n = -1, \chi = +1$

$$\begin{cases} E_{\rho 1} = -j\beta TAJ_0(T\rho) e^{j\phi} e^{-j\beta z} \\ E_{\phi 1} = \beta TAJ_0(T\rho) e^{j\phi} e^{-j\beta z} \\ E_{z1} = T^2 AJ_1(T\rho) e^{j\phi} e^{-j\beta z} \\ H_{\rho 1} \approx -\frac{\beta T A}{\eta_1} J_0(T\rho) e^{j\phi} e^{-j\beta z} \\ H_{\phi 1} \approx -j \frac{\beta T A}{\eta_1} J_0(T\rho) e^{j\phi} e^{-j\beta z} \\ H_{z1} \approx -j \frac{T^2 A}{\eta_1} J_1(T\rho) e^{j\phi} e^{-j\beta z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_{\rho 1} = j\beta TAJ_0(T\rho) e^{-j\phi} e^{-j\beta z} \\ E_{\phi 1} = \beta TAJ_0(T\rho) e^{-j\phi} e^{-j\beta z} \\ E_{z1} = -T^2 AJ_1(T\rho) e^{-j\phi} e^{-j\beta z} \\ H_{\rho 1} \approx -\frac{\beta T A}{\eta_1} J_0(T\rho) e^{-j\phi} e^{-j\beta z} \\ H_{\phi 1} \approx j \frac{\beta T A}{\eta_1} J_0(T\rho) e^{j\phi} e^{-j\beta z} \\ H_{z1} \approx -j \frac{T^2 A}{\eta_1} J_1(T\rho) e^{-j\phi} e^{-j\beta z} \end{cases}$$

Modul fundamental este HE11. Modurile HE cu $n = 1$ si $n = -1$ reprezinta unde oblice circular polarizate in sensuri opuse, cu coeficienti de faza egali. Superpozitia acestor doua unde cu amplitudini egale determina o unda polarizata liniar numita modul LP01.

Cimpurile sunt date de relatiile de pe slide.

Prin superpozitia lor obtinem cimpurile din unda LP01.

Cimpurile in fibra monomod Modul LP₀₁

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\rho 1} = 2k_1 T A J_0(T\rho) \sin \phi e^{-j\beta z} \\ E_{\phi 1} = 2k_1 T A J_0(T\rho) \cos \phi e^{-j\beta z} \\ E_{z1} = j 2T^2 A J_1(T\rho) \sin \phi e^{-j\beta z} \\ H_{\rho 1} = -2 \frac{k_1 T A}{\eta_1} J_0(T\rho) \cos \phi e^{-j\beta z} \\ H_{\phi 1} = 2 \frac{k_1 T A}{\eta_1} J_0(T\rho) \sin \phi e^{-j\beta z} \\ H_{z1} = -j 2 \frac{T^2 A}{\eta_1} J_1(T\rho) \cos \phi e^{-j\beta z} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{y1} = E_0 J_0(T\rho) e^{-j\beta z} \\ E_{z1} = j \frac{T}{k_1} E_0 J_1(T\rho) \sin \phi e^{-j\beta z} \\ H_{x1} = -\frac{E_0}{\eta_1} J_0(T\rho) e^{-j\beta z} \\ H_{z1} = -j \frac{T}{\omega \mu_0} E_0 J_1(T\rho) \cos \phi e^{-j\beta z} \end{array} \right.$$

$$E_0 = 2k_1 T A$$

$$\beta \approx k_1$$

Cimpurile in fibra monomod

Modul LP₀₁

$$\begin{cases} E_{y1} = E_0 J_0(T\rho) e^{-j\beta z} \\ H_{x1} = -\frac{E_0}{\eta_1} J_0(T\rho) e^{-j\beta z} \end{cases}$$

$$E_0 = 2k_1 T A$$

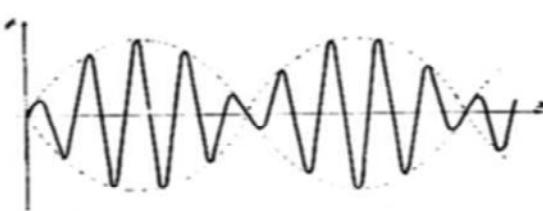
$$\beta \approx k_1$$

Fibrele optice sunt ghiduri de unda cu ghidare slabă în care undele se propagă într-o directie aproape paralelă cu axa z a fibrei. Astfel $T \ll \beta$, $\theta \ll \beta$ și $\beta \approx k_1$. Aceasta implica $E_z \ll E_y$ și $H_z \ll H_x$, deci componentele cimpului sunt ca pe slide: cimpul în miez este similar cu cel dintr-o undă plană.

DISPERSIA IN FIBRELE MONOMOD GRUP DE UNDE

$$v - v' = \Delta v$$

$$u - u' = \Delta u$$



$$\begin{aligned} \phi &= a \sin 2\pi v \left(t - \frac{x}{u} \right) + a \sin 2\pi v' \left(t - \frac{x}{u'} \right) = \\ &= 2a \sin \pi \left[t(v + v') - x \left(\frac{v}{u} + \frac{v'}{u'} \right) \right] \cos \pi \left[t(v - v') - x \left(\frac{v}{u} - \frac{v'}{u'} \right) \right] \end{aligned}$$

$v + v' = 2v$ $\frac{v}{u} + \frac{v'}{u'} = 2 \frac{v}{u}$ $\frac{v}{u} - \frac{v'}{u'} \triangleq \Delta \left(\frac{v}{u} \right)$

$$\phi \approx 2a \sin 2\pi v \left(t - \frac{x}{u} \right) \cos \pi \left[t\Delta v - x\Delta \left(\frac{v}{u} \right) \right] = A \sin 2\pi v \left(t - \frac{x}{u} \right)$$

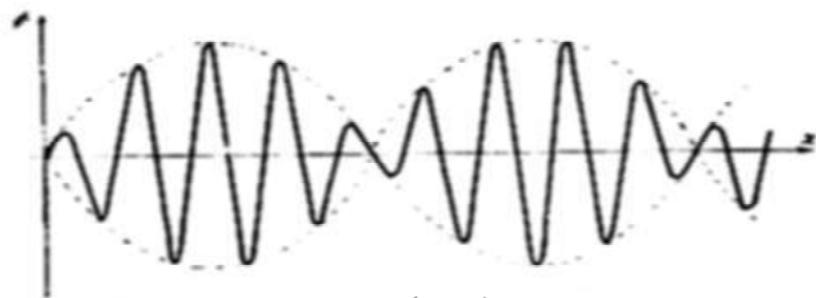
Am vazut ca dispersia intermodala in fibrele multimod conduce la o largire considerabila a impulsurilor optice (~ 10 ns/km). In descrierea modala a propagarii, acest fenomen se datoreste faptului ca fiecare mod are o viteza de grup diferita.

In fibrele monomod, dispersia intermodala dispare deoarece energia este transportata de un singur mod.

Totusi, latirea impulsului nu dispare. Viteza de grup asociata cu modul fundamental de propagare este dependenta de frecventa din cauza dispersiei cromatice. Prin urmare, diferite componente spectrale ale impulsului se propaga cu viteze de grup diferite, fenomen numit dispersie intramodala sau dispersie de viteza de grup (GVD).

Aceasta dispersie are doua componente: dispersia de material si dispersia de ghid.

GRUP DE UNDE



$$t \Delta v - x \Delta \left(\frac{v}{u} \right) = 0$$

$$\frac{1}{v_g} = \frac{t}{x} = \frac{\Delta \left(\frac{v}{u} \right)}{\Delta v} \xrightarrow{\Delta v \rightarrow 0} \frac{d}{dv} \left(\frac{v}{u} \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\beta(v)}{dv}$$

DISPERSIA CROMATICA

$$v_g = \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right)^{-1} \quad v_g = \frac{c}{n_g}, \beta = \bar{n}k_0 = \bar{n} \frac{\omega}{c}$$

$$n_g = \bar{n} + \omega \frac{d\bar{n}}{d\omega}$$

$$\Delta T = \frac{dT}{d\omega} \Delta \omega = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{L}{v_g} \right) \Delta \omega = L \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{v_g} \right) \Delta \omega = L \frac{d}{d\omega} \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right)^{-1} \Delta \omega = L \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \Delta \omega = L \beta_2 \Delta \omega$$

$$\beta_2 = \frac{d^2\beta}{d\omega^2}$$

$$\Delta T = \frac{dT}{d\lambda} \Delta \lambda = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{L}{v_g} \right) \Delta \lambda = L D \Delta \lambda$$

$$D = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{v_g} \right) = - \frac{2\pi c}{\lambda^2} \beta_2$$

Consideram o fibra de lungime L. O componenta spectrala de frecventa omega ar ajunge la ieșirea fibrei după un timp $T = L/v_g$, unde v_g este viteza de grup definită prin.....

Folosindobținem n_g .

Dependenta de frecventa a vitezei de grup conduce la latirea pulsului din cauza faptului că diferite componente spectrale dispersiei spectrului. Dacă Δ_ω este latimea spectrului pulsului, latirea impulsului este data de.....

β_2 este dispersia cromatică sau GVD.

In sistemele optice de comunicatii, Δ_ω este determinat de domeniul de lungimide unde emise de sursa optica.

D se numește parametrul de dispersie și se măsoara în $\text{ps}/(\text{nm} \cdot \text{km})$.

DISPERSIA CROMATICA

$$BL|D|\Delta\lambda < 1$$

$$\Delta T = \frac{dT}{d\lambda} \Delta \lambda = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{L}{v_g} \right) \Delta \lambda = L D \Delta \lambda$$

$$D = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{v_g} \right) = -\frac{2\pi}{\lambda^2} \left(2 \frac{d\bar{n}}{d\omega} + \omega \frac{d^2\bar{n}}{d\omega^2} \right)$$

$$D = D_M + D_W$$

$$D_M = -\frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{d\bar{n}}{d\omega} = \text{dispersia de material}$$

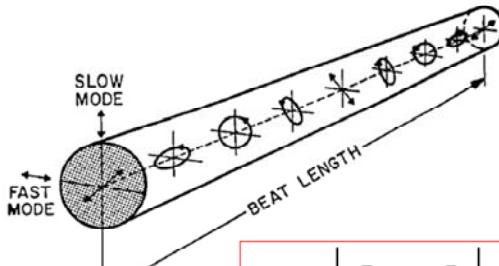
$$D_W = -\frac{2\pi}{\lambda^2} \omega \frac{d^2\bar{n}}{d\omega^2} = \text{dispersia de ghid}$$

Efectul dispersiei este reducerea vitezei de bit B. Aceasta poate fi estimată prin condiția Pentru fibrele standard din silică, D este relativ mic în jurul lungimii de unde de 1.3 microni. ($D \sim 1 \text{ ps}/(\text{km} \cdot \text{nm})$).

Pentru o dioda laser, latimea spectrală $\Delta\lambda$ este de 2-4 nm. Produsul BL depășește 100 $(\text{Gb}/\text{s}) \cdot \text{km}$. Astfel, sistemele de comunicații optice pe 1.3 microni funcționează tipic la viteze de 2 Gb/s cu un interval între repetări de 40-50 km. Produsul BL a fibrelor monomod poate depăși 1 $(\text{Tb}/\text{s}) \cdot \text{km}$ cind laserul are o latime spectrală sub 1 nm.

Parametrul de dispersie D poate varia considerabil cind lungimea de undă de funcționare difere considerabil de 1.3 microni. Dependenta de lungimea de undă a lui D este guvernată de dependența de frecvență a indicelui de refracție n_{barat} .

DISPERSIA MODULUI DE POLARIZARE



$$B_m = |\bar{n}_x - \bar{n}_y|$$

$$L_B = \lambda / B_m$$

$$\Delta T = \left| \frac{L}{v_{gx}} - \frac{L}{v_{gy}} \right| = L |\beta_{lx} - \beta_{ly}| = L (\Delta \beta_l)$$

$$\sigma_T^2 \equiv \langle (\Delta T)^2 \rangle$$

$$\sigma_T^2(z) = 2(\Delta \beta_l)^2 l_c^2 \left[\exp(-z/l_c) + z/l_c - 1 \right]$$

O alta sursa de latire a impulsului este birefringenta fibrei.

Modurile polarizate ortogonal care se propaga in fibra raman separate doar in cazul perfect in care miezul este perfect cilindric cu diametru constant.

In cazul in care simetria cilindrica a fibrei este distrusa, degenerenta dintre modurile polarizate ortogonal se distruge, ceea ce se numeste birefringenta.

Gradul de birefringenta modal este definit prin B_m , unde n_x si n_y sunt indicii modali pentru cele doua moduri polarizate ortogonal.

Birefringenta conduce la un schimb de putere intre cele doua componente de polarizare.

Din punct de vedere fizic, lumina polarizata liniar ramine neschimbata numai daca este polarizata in lungul unei axe principale. Altfel, starea de polarizare se schimba in lungul fibrei, de la liniar la eliptic si inapoi la liniar, intr-o maniera periodica de perioada L_B .

Axa rapida este axa in lungul careia indicele de mod este cel mai mic.

Tipic, $B_m \sim 10^{-7}$ si $L_B \sim 10m$ pentru $\lambda \sim 1$ micrometru.

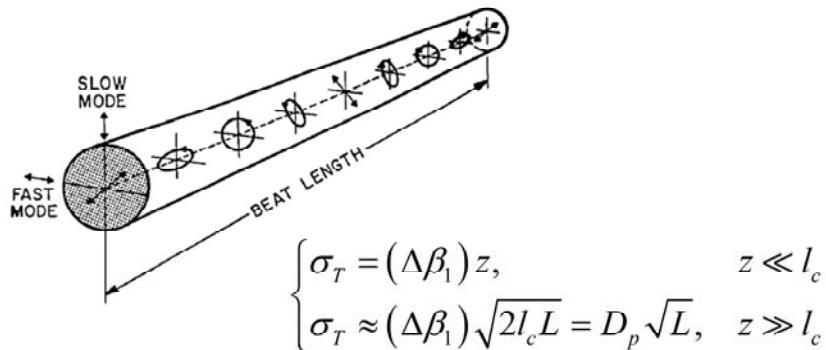
Daca impulsul de lumina de la intrare excita ambele polarizari, el se va lati deoarece cele doua componente disperseaza in lungul fibrei. Acest fenomen se numeste dispersia modului de polarizare – PMD.

In fibrele cu birefringenta constanta, latirea impulsului poate fi estimata din intirzarea ΔT intre cele doua componente de polarizare.

Latirea impulsului indusa de PMD este caracterizata de valoarea medie patratica a lui ΔT , obtinuta dupa medierea peste schimbari aleatorii de birefringenta.

L_c este lungimea de corelatie definita ca fiind lungimea peste care doua componente de polarizare raman corelate. Valoarea sa poate varia intre 1 m si 1 km, in functie de fibra. Valoarea tipica este de $\sim 10m$.

DISPERSIA MODULUI DE POLARIZARE



Pentru distante mici, $z \ll l_c$, $\sigma_T = (\Delta\beta_1)z$.

Pentru $z > 1\text{ km}$, o buna estimare a latirii impulsului este obtinuta considerind $z \gg l_c$. Pentru o fibra de lungime L , avem....

Unde D_p este parametrul PMD. Valorile masurate ale lui D_p variaza intre $0.01 - 10 \text{ ps/sqr(km)}$.

$\sigma_T \sim 1 \text{ ps}$ pentru fibre de lungime $\sim 100 \text{ km}$.